Anisse
Groupe scolaire
2017-2018

Matière: Mathèmatiques
Contrôle N° 1
1 Session

Le 13/10/2017
2 Bac - SM-
Durée: 2h00

Ex 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x-1+\sqrt{x^2+1} & \text{si } x<0 \\ f(x)=\sqrt[3]{x-\operatorname{Arctan} x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

1 1) Étudier la continuité de f en 0.

1 2) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$ $\operatorname{Arctan} x\leq x$

2 3)a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\leq x-\operatorname{Arctan} x\leq\frac{x^3}{3}$$

1 b) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\operatorname{Arctan} x}{x^3}$

2 c) Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

2 4) Étudier les variations de la fonction f

5) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2 a) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.

1 b) Construire la courbe $\mathscr{C}$ (On donne : $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\approx0,7$)

1 6) Soit g la restriction de la fonction f sur $I=\mathbb{R}^*_-$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in\mathcal{J}$

Ex 2 :

I) Calculer les limites suivantes :

2 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{x}.\sqrt[15]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1 II) Montrer que : $2\operatorname{Arctan}(2)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\pi$

2 III) Montrer que pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$:

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=2\operatorname{Arctan}(x)-\pi$$

2 IV) Soit f une fonction numérique continue sur $[a,b]$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $c\in\left]a,b\right[$ tel que

$$f(c)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}$$

bonne chance