Les équations différentielles

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction notée généralement y , dans laquelle apparaissent ses dérivées premières y' ou des dérivées supérieures y'' .

Equation différentielle du type : $y' = ay + b$

- L'équation $(E): y' = ay + b$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; où y est la fonction inconnue et y' sa fonction dérivée.
- On appelle solution de l'équation (E), toute fonction f qui vérifie :
$$f'(x) = af(x) + b$$
- Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} / \lambda \in \mathbb{R}$$
- ***Exemple***

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $(E): y' + 2y = 3$.
   On a $y' + 2y = 3 \Leftrightarrow y' = -2y + 3$
   alors Les solutions de l'équation Différentielle (E) est les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$y(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2} / \lambda \in \mathbb{R}$$
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(1) = 2$.
$$f(1) = 2 \Leftrightarrow \lambda e^{-2} + \frac{3}{2} = 5$$
$$\Leftrightarrow \lambda e^{-2} = \frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda e^{-2} = \frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{7e^2}{2}$$
   Donc : $f(x) = \frac{7e^2}{2} e^{-2x} + \frac{3}{2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$
   D'où $f(x) = \frac{7}{2} e^{-2x+2} + \frac{3}{2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Equation différentielle du type : $y'' + ay' + by = 0$

- (E)L'équation $(E): y'' + ay' + by = 0$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 2 ; où y est la fonction inconnue et y' sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde
- L'équation $r^2 + ar + b = 0$ s'appelle l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (E)
- Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

➢ Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solution réelles r_1 *et* r_2 , donc Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \ / \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

➢ Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une solution réelle unique r_0 donc Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$y(x) = (\lambda x + \beta) e^{r_0 x} \ / \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

➢ Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes sont $Z_1 = p + iq$ *et* $Z_2 = \overline{Z_1}$ donc Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$y(x) = (\lambda \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px} / \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Exercice :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(E_1): y'' - 3y' + 2y = 0$$
b) Déterminer la fonction f solution de (E_3) qui vérifie
$$f(0) = 3 \quad et \quad f'(0) = 8$$
2)a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(E_2): y'' - 6y' + 9y = 0$$
b) Déterminer la fonction f solution de (E_2) qui vérifie
$$f(0) = -1 \quad et \quad f'(0) = 5$$
3)a) Résoudre dans IR l'équation différentielle
$$(E_3): y'' - 2y' + 5y = 0$$
b) Déterminer la fonction f solution de (E_2) qui vérifie
$$f(0) = 5 \quad et \quad f'(0) = 9$$

Prof : Monsif Benabdesalam
Prof : Monsif Benabdesalam