# Chapitre ⑥ : Ordre et opérations :

## I - Comparaison de deux nombres réels :

### 1) Activité ① :

Comparer $a$ et $b$ dans chacun des cas suivants :

1) $a = \frac{12}{7}$ et $b = \frac{15}{7}$ 3) $a = \frac{5}{4}$ et $b = \frac{11}{8}$

2) $a = \frac{15}{14}$ et $b = -\frac{12}{7}$ 4) $a = \frac{6}{5}$ et $b = \frac{6}{11}$

**Réponse :**

1) On a $15 > 12$ donc $\frac{15}{7} > \frac{12}{7}$

2) On a $-\frac{12}{7} < 0$ et $\frac{15}{14} > 0$ donc $-\frac{12}{7} < \frac{15}{14}$

3) On a $a = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ et $10 < 11$ donc $\frac{10}{8} < \frac{11}{8}$ alors $\frac{5}{4} < \frac{11}{8}$

4) On a $5 < 11$ donc $\frac{6}{5} > \frac{6}{11}$

### 2) Règle ① :

$a$ et $b$ deux nombres réels

* Si $a - b \leq 0$ alors $a \leq b$
* Si $a - b \geq 0$ alors $a \geq b$

C'est à dire, pour comparer deux nombres réels, on étudie le signe de leur différence.

### 3) Exemples :

1°/ Comparons les nombres $a = \frac{4}{35}$ et $b = \frac{2}{15}$

On a $a - b = \frac{4}{35} - \frac{2}{15} = \frac{12 - 14}{105} = \frac{-2}{105}$

On a $\frac{-2}{105} < 0$ donc $a - b < 0$

Alors $a < b$

2°/ Comparons les nombres $2\sqrt{3} - 4$ et $\sqrt{3} - 5$

On a : $(2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) = 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} + 5$
$= \sqrt{3} + 1$

or $\sqrt{3} + 1 > 0$ donc $(2\sqrt{3} - 4) - (\sqrt{3} - 5) > 0$

Alors $2\sqrt{3} - 4 > \sqrt{3} - 5$

3°/ Comparons $x$ et $y$ tel que $x = y - 3$

On a $x - y = (y - 3) - y = y - 3 - y = -3 < 0$

donc $x - y < 0$ Alors $x < y$

### 4) Exercice d'application :

Comparer les deux nombres dans chacun des cas :

1) $\frac{12}{7}$ et $\frac{15}{14}$

2) $7 + \sqrt{2}$ et $-3\sqrt{2} - 1$

3) $\sqrt{3} - 1$ et $5\sqrt{3} + 4$

**Solution**

1) On a $\frac{15}{14} - \frac{12}{7} = \frac{15 - 24}{14} = \frac{-9}{14}$

or $\frac{-9}{14} < 0$ donc $\frac{15}{14} - \frac{12}{7} < 0$

Alors $\frac{15}{14} < \frac{12}{7}$

2) On a $(7 + \sqrt{2}) - (-3\sqrt{2} - 1) = 7 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 1$
$= 4\sqrt{2} + 8$

or $4\sqrt{2} + 8 > 0$ alors $(7 + \sqrt{2}) - (-3\sqrt{2} - 1) > 0$

Donc $7 + \sqrt{2} > -3\sqrt{2} - 1$

3) On a $(5\sqrt{3} + 4) - (\sqrt{3} - 1) = 5\sqrt{3} + 4 - \sqrt{3} + 1$
$= 4\sqrt{3} + 5$

or $4\sqrt{3} + 5 > 0$ donc $(5\sqrt{3} + 4) - (\sqrt{3} - 1) > 0$

Alors $5\sqrt{3} + 4 > \sqrt{3} - 1$

## II - Ordre et opérations :

### 1) Ordre et addition :

a - Propo ① :

$a$, $b$ et $c$ trois nombres réels

* Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$
* Si $a + c \leq b + c$ alors $a \leq b$

**Exemple :**

$a$, $b$ deux nombres réels tel que $a + 4 \leq b$

Montrons que $a + 1 \leq b - 3$

On a $a + 4 \leq b$ donc $a + 4 - 3 \leq b - 3$

Alors $a + 1 \leq b - 3$

b- propo ②:

a, b, c et d des nombres réels

Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ Alors : $a+c \leq b+d$

* Exemple :
a, b deux nombres réels telque

$a+3 \leq 3$ et $b+4 \leq \sqrt{2}$

Montrons que $a+b+7 \leq \sqrt{2}+3$

On a $\begin{cases} a+3 \leq 3 \\ b+4 \leq \sqrt{2} \end{cases}$ donc $a+3+b+4 \leq 3+\sqrt{2}$

Alors $a+b+7 \leq 3+\sqrt{2}$

## 2) Ordre et multiplication :

a- Activité ②:

a, b et c des nombres réels telque $a \leq b$

1) Supposons que $c > 0$ Comparons $ac$ et $bc$
2) Supposons que $c < 0$ Comparons $ac$ et $bc$

Solution :

1) On a $ac - bc = c(a-b)$
or $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$
et $c > 0$ donc $c(a-b) \leq 0$
càd $ac - bc \leq 0$
Alors $ac \leq bc$

2) On a $ac - bc = c(a-b)$
On a $a-b \leq 0$ et $c < 0$
donc $c(a-b) \geq 0$
donc $ac - bc \geq 0$
Alors $ac \geq bc$

b- propo ③

a, b et c des nombres réels

* Si $a \leq b$ et $c > 0$ donc $a \times c \leq b \times c$
* Si $a \leq b$ et $c < 0$ donc $a \times c \geq b \times c$

Remarque :

$\Rightarrow$ Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$
càd l'opposé change l'ordre.

* Exemple :
a et b deux nombres réels telque

$a \geq \frac{4}{3}$ et $b \geq \sqrt{3}$

Déduisons un ordre de $3a$ et $-2b$

On a $a \geq \frac{4}{3}$ donc $3 \times a \geq 3 \times \frac{4}{3}$
donc $3a \geq 4$

On a : $b \geq \sqrt{3}$ donc $-2 \times b \leq -2 \times \sqrt{3}$
donc $-2b \leq -2\sqrt{3}$

c- Propo ④:

a, b, c et d des nombres réels positifs.

Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ Alors : $a \times c \leq b \times d$

* Exemple :
x et y deux nombres réels positifs telque

$x < \sqrt{3}$ et $y < 2\sqrt{6}$

Montrons que $xy < 6\sqrt{2}$

On a $\begin{cases} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{cases}$ donc $x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$

$x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$x \times y < 2 \times 3 \times \sqrt{2}$

$\Rightarrow xy < 6\sqrt{2}$

d- Exercice d'application :

x et y deux nombres réels telque $x \geq 1$ et $y \geq 2$

Montrer que $(x-1)(y-2) \geq 0$

Solution :

On a $x \geq 1$ donc $x - 1 \geq 0$
et $y \geq 2$ donc $y - 2 \geq 0$
càd $(x-1)(y-2) \geq 0$

## 3) Ordre et inverse :

a- propo ⑤:

a et b deux nombres réels strictement positifs

Si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ et la réciproque est vraie

l'inverse change l'ordre.

### b- Exemples:

* On a $2<4$ donc $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$
* On a $11>5$ donc $\frac{1}{11} < \frac{1}{5}$

### c- Exercice d'application:

$x$ un nombre réel tel que $x \geq 1$

Montrer que $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geq \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

On a $x \geq 1$ donc $x+2\sqrt{3} \geq 1+2\sqrt{3}$

Alors $\frac{1}{x+2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{1+2\sqrt{3}}$

Alors $\frac{-5}{x+2\sqrt{3}} \geq \frac{-5}{1+2\sqrt{3}}$

## 4) Autres propriétés : Carré et racine carré

### a- propo ⑥ : Carré

a, b deux nombres réels positifs
* $a \leq b$ est équivalent à $a^2 \leq b^2$

**Remarques :**

* a et b deux nombres réels négatifs

$\Rightarrow$ $a \leq b$ est équivalent à $a^2 \geq b^2$

* L'ordre change dans les cas suivants:
  - → On multiplie par un nombre négatif (ou opposé)
  - → On fait l'inverse
  - → On prend le carré de deux nombres négatifs

*** Exemples:**

→ Comparons $3$ et $2\sqrt{2}$

On a $\begin{cases} (2\sqrt{2})^2 = 4\times 2 = 8 \\ 3^2 = 9 \end{cases}$

donc $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$

Alors $2\sqrt{2} < 3$

→ Comparons $-2\sqrt{5}$ et $-3\sqrt{2}$

On a $\begin{cases} (2\sqrt{5})^2 = 4\times 5 = 20 \\ (3\sqrt{2})^2 = 9\times 2 = 18 \end{cases}$

donc $(3\sqrt{2})^2 < (2\sqrt{5})^2$

Alors $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$ càd $-3\sqrt{2} > -2\sqrt{5}$

### b- propo ⑦ : Racine carré

a et b deux nombres positifs
* Si $a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
* Si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ alors $a \leq b$

### c- Exercice d'application:

1) Comparer $3\sqrt{3}$ et $4\sqrt{2}$ après $\sqrt{91}$ et $6\sqrt{3}$

2) Comparer les nombres $\sqrt{5}+4$ et $\sqrt{3}+4$

**Solution :**

1) On a $\begin{cases} (3\sqrt{3})^2 = 9\times 3 = 27 \\ (4\sqrt{2})^2 = 16\times 2 = 32 \end{cases}$

On a $27 < 32$ donc $(3\sqrt{3})^2 < (4\sqrt{2})^2$

Alors $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$

* On a $\begin{cases} \sqrt{91}^2 = 91 \\ (6\sqrt{3})^2 = 36\times 3 = 108 \end{cases}$

On a $91 < 108$ donc $\sqrt{91}^2 < (6\sqrt{3})^2$

Alors $\sqrt{91} < 6\sqrt{3}$

2) On a $\begin{cases} \sqrt{3}^2 = 3 \\ \sqrt{5}^2 = 5 \end{cases}$ donc $\sqrt{3}^2 < \sqrt{5}^2$

$\Rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{5}$

Alors $\sqrt{3}+4 < \sqrt{5}+4$

## III- Encadrement:

### 1) Encadrement d'une somme:

*** Propo ⑧:**

On considère tous les nombres réels ~~positifs~~

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ Alors $a+c \leq x+y \leq b+d$

*** Exemple:**

$x$, $y$ deux nombres réels tel que

$2 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$

Encadrer $x+y$

On a $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq -1 \end{cases}$ donc $2+(-3) \leq x+y \leq 5+(-1)$

Alors: $-1 \leq x+y \leq 4$

### 2) Encadrement d'un opposé:

*** Propo ⑨:**

$x$ un nombre réel tel que $a \leq x \leq b$

On a: $-b \leq -x \leq -a$

*** Exemple:** Soit $-4 \leq x \leq 3$

On a $-3 \leq -x \leq 4$

### 3) Encadrement d'une différence:

*** Propo 10:** On considère tous les nombres réels

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ Alors $a-d \leq x-y \leq b-c$

**Remarque importante:**

On a $a-b = a+(-b)$

Donc pour encadrer $a-b$, on encadre d'abord $-b$ après on applique la propo 8 (De la somme)

*** Exemple:**

$x$ et $y$ deux nombres réels telque $3 \leq x \leq 8$ et $-4 \leq y \leq 2$

Encadrons $x-y$

On a $-4 \leq y \leq 2$ donc $-2 \leq -y \leq 4$

On a $\begin{cases} 3 \leq x \leq 8 \\ -2 \leq -y \leq 4 \end{cases}$ donc $3+(-2) \leq x+(-y) \leq 8+4$

Alors $1 \leq x-y \leq 12$

### 4) Encadrement d'un produit:

**Propo 11:** On considère tous les nombres réels positifs

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ alors $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$

*** Exemples:**

→ **Cas 1:** Tous les nombres réels positifs.

$3 \leq x \leq 7$ et $1 \leq y \leq 4$

Encadrons $xy$

On a $\begin{cases} 3 \leq x \leq 7 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$

donc $3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 4$

alors $3 \leq xy \leq 28$

→ **Cas 2:** $x$ positif et $y$ négatif

$4 \leq x \leq 8$ et $-5 \leq y \leq -2$

Encadrons $xy$

D'abord les nombres encadrants $y$ doivent être positif

On a $-5 \leq y \leq -2$ donc $2 \leq -y \leq 5$

On a $\begin{cases} 4 \leq x \leq 8 \\ 2 \leq -y \leq 5 \end{cases}$ Remarquez que tous les nombres sont positifs

donc $4 \times 2 \leq x \times (-y) \leq 8 \times 5$

$8 \leq -xy \leq 40$

Mais ce qui est est $xy$ pas $-xy$, donc on se débarasse du signe $-$

On a $8 \leq -xy \leq 40$

donc $-40 \leq xy \leq -8$

### 5) Encadrement d'un inverse:

*** Propo 12:** $x$, $a$ et $b$ des nombres réels non nuls telque $a \leq x \leq b$

On a: $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$

*** Exemples**

On a $2 \leq x \leq 4$ donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

### 6) Encadrement d'un quotient:

*** Propo 13:** On considère tous les nombres réels positifs

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ telque $c \neq 0$ et $y \neq 0$ et $d \neq 0$

Donc: $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

*** Remarque importante:**

On a $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

Donc pour encadrer $\frac{a}{b}$, on encadre d'abor $\frac{1}{b}$ après on applique la propo 11 (produi

*** Exemples:**

→ **Cas 1:** tous les nombres positifs.

$x$ et $y$ des nombres réels telque

$6 \leq x \leq 10$ et $2 \leq y \leq 3$ Encadrer $\frac{x}{y}$

~~On a $\frac{x}{y} = x\times\frac{1}{y}$ donc encadrons d'abord $\frac{1}{y}$~~

~~On a $-3 \le y \le -2$ donc~~

On a $\frac{x}{y} = x\times\frac{1}{y}$ donc encadrons d'abord $\frac{1}{y}$

On a $2 \le y \le 3$ donc $\frac{1}{3} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

On a $\begin{cases} 6 \le x \le 10 \\ \frac{1}{3} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 6\times\frac{1}{3} \le x\times\frac{1}{y} \le 10\times\frac{1}{2}$

Alors: $2 \le \frac{x}{y} \le 5$

→ Cas ⑤: $x$ positif et $y$ négatif

$2 \le x \le 5$ et $-4 \le y \le -2$

Encadrer $\frac{x}{y}$

On doit transformer les nombres en nombres positifs

On a $-4 \le y \le -2$ donc $2 \le -y \le 4$

après l'inverse de $-y$

donc $\frac{1}{4} \le -y \le \frac{1}{2}$

On a $\begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ \frac{1}{4} \le -\frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $2\times\frac{1}{4} \le x\times\left(-\frac{1}{y}\right) \le 5\times\frac{1}{2}$

$\frac{2}{4} \le -\frac{x}{y} \le \frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2} \le \frac{x}{y} \le -\frac{2}{4}$

Alors: $-\frac{5}{2} \le \frac{x}{y} \le -\frac{1}{2}$

## 7) Exercices d'application:

* Exercice ①:

$2 \le a \le 3$ et $-4 \le b \le -3$

→ Encadrement de $a+b$

On a $\begin{cases} 2 \le a \le 3 \\ -4 \le b \le -3 \end{cases}$ donc $2+(-4) \le a+b \le 3+(-3)$

$-2 \le a+b \le 0$

→ Encadrement de $a-b$

On a $-4 \le b \le -3$ donc $3 \le -b \le 4$

On a $\begin{cases} 2 \le a \le 3 \\ 3 \le -b \le 4 \end{cases}$ donc $2+3 \le a+(-b) \le 3+4$

Alors: $5 \le a-b \le 7$

→ Encadrement de $ab$

On a $\begin{cases} 2 \le a \le 3 \\ 3 \le -b \le 4 \end{cases}$ donc $2\times3 \le a\times(-b) \le 3\times4$

$6 \le -ab \le 12$

Alors: $-12 \le ab \le -6$

* Encadrement de $\frac{a}{b}$:

On a $3 \le -b \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le -\frac{1}{b} \le \frac{1}{3}$

$\begin{cases} 2 \le a \le 3 \\ \frac{1}{4} \le -\frac{1}{b} \le \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2\times\frac{1}{4} \le a\times\left(-\frac{1}{b}\right) \le 3\times\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \le -\frac{a}{b} \le 1$

Alors: $-1 \le \frac{a}{b} \le -\frac{1}{2}$

* Exercice ②:

$a$, $b$ et $c$ trois nombres réels tel que:

$6 \le a \le 8$ et $-4 \le b \le -2$ et $-3 \le c \le 5$

Encadrer $a^2$, $b^2$, $a+2b-4c$, $\frac{a+b}{a^2}$

→ Encadrement de $a^2$

On a $6 \le a \le 8$ donc $6^2 \le a^2 \le 8^2$

Alors $36 \le a^2 \le 64$

→ Encadrement de $b^2$

On a $-4 \le b \le -2$ donc $(-2)^2 \le b^2 \le (-4)^2$

Alors: $4 \le b^2 \le 16$

→ Encadrement de $a+2b-4c$

On a $-4 \le b \le -2$ donc $-8 \le 2b \le -4$

On a $-3 \le c \le 5$ donc $-20 \le -4c \le 12$

On a $\begin{cases} 6 \le a \le 8 \\ -8 \le 2b \le -4 \\ -20 \le -4c \le 12 \end{cases}$

donc $6-8-20 \le a+2b-4c \le 8-4+12$

$-22 \le a+2b-4c \le 16$

→ Encadrement de $\frac{a+b}{b^2}$

On a $\begin{cases} 6 \le a \le 8 \\ -4 \le b \le -2 \end{cases}$ donc $6+(-4) \le a+b \le 8+(-2)$

$2 \le a+b \le 6$

et on a $4 \le b^2 \le 16$ donc $\frac{1}{16} \le \frac{1}{b^2} \le \frac{1}{4}$

On a $\begin{cases} 2 \le a+b \le 6 \\ \frac{1}{16} \le \frac{1}{b^2} \le \frac{1}{4} \end{cases}$

donc $2\times\frac{1}{16} \le \frac{a+b}{b^2} \le 6\times\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8} \le \frac{a+b}{b^2} \le \frac{3}{2}$