

# NOMBRES COMPLEXES

## A) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL : 1) Soit $\theta$ un réel on pose : $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$

Soit  $z = [r, \theta]$  un complexe non nul, on a :

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$  Cette écriture s'appelle la forme exponentielle

2) Soient  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$

a)  $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$     b)  $z^n = r^n e^{in\theta}$     c)  $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$

d)  $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$     e)  $\bar{z} = re^{-i\theta}$     f)  $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

g) Pour tout réel  $\theta$  on a :  $(re^{i\theta})^n = (r)^n re^{in\theta}$

d'où :  $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

(Formule de Moivre)

h) Formule d'Euler : Pour tout réel  $\theta$  on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left( e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

## B) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS C :

### 1) Les équations de second degré

Soit dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  (E) où  $a, b, c$  sont des réels avec  $a \neq 0$

soit  $\Delta = b^2 - 4ac$  son discriminant

on a : Si  $\Delta = 0$  alors l'équation (E) admet comme solution le complexe  $z = -\frac{b}{2a}$

Si  $\Delta \neq 0$  l'équation (E) admet comme solution les

complexes  $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$  où  $\delta$  une racine

carrées de  $\Delta$

**Remarque :** Si les coefficients  $a, b$  et  $c$  sont des réels et  $\Delta < 0$  alors l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet deux racines complexes conjugué  $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

## C) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) **La translation :** Soit  $\vec{u}$  un vecteur de  $\mathcal{V}_2$  tel que :

$aff(\vec{u}) = a$  ; la Translation  $t_{\vec{u}}$  transforme  $M(z)$  en  $M'(z')$  si et seulement si :  $z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation

$t_{\vec{u}}$  de vecteur  $\vec{u}$  tel que  $aff(\vec{u}) = a$

2) **L'homothétie :** l'homothétie de centre  $\Omega(\omega)$  et de

Rapport  $k$ , admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = kz + \omega(1 - k)$$

3) **La rotation :** La rotation de centre  $\Omega(\omega)$  et d'angle  $\theta$ ,

admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = (z - \omega)e^{i\theta} + \omega$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Bon courage