

## EXERCICES ET PROBLÈMES

### Exercice 1:

1) Simplifier les expressions suivantes.

$$A = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$B = (e^x - e^{-x})^2 (e^{2x} + e^x + 1)$$

2) Montre que pour tout  $x$  de  $\mathbf{IR}$  on a :

$$\bullet \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1 - e^x}{e^x + 1}$$

$$\bullet \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

### Exercice 2:

Résoudre dans  $\mathbf{IR}$  les équations suivantes.

1)  $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

2)  $e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$

3)  $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$

### Exercice 3:

Résolvez dans  $\mathbf{IR}$  les inéquations suivantes.

1)  $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

2)  $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$                       3)  $\frac{e^x - 1}{e^x - 2} > 0$

### Exercice 4: calculer les limites suivantes.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{x^2 + x}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \cdot e^{-x}$$

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - e^x$$

$$E = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^x$$

$$F = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^{-x}$$

$$G = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x + 1}$$

### Exercice 5:

Démontrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{IR}$ , puis calculer  $f'(x)$  dans chacun des cas suivants.

1)  $f(x) = x \cdot e^{\sqrt{x}}$                       2)  $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$

3)  $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$                       4)  $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

### Exercice 6 :

Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $I$ .

1)  $f(x) = e^{-x+1}$  ;                       $I = \mathbf{IR}$ .

2)  $f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$  ;                       $I = \mathbf{IR}$ .

3)  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$  ;                       $I = \mathbf{IR}$

4)  $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$  ;                       $I = \mathbf{IR}$

5)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$  ;                       $I = \mathbf{IR}$

6)  $f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$  ;                       $I = \mathbf{IR}$

### Exercice 7 :

Soit la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  par :

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$$

1) Déterminer la dérivée seconde de la fonction  $f$ .

2) Vérifier que :

$$(\forall x \in \mathbf{IR}); f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$$

3) Déterminer une primitive de la fonction  $f$ .

### Exercice 8:

Soit la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  par :

$$f(x) = x + \frac{4}{1+e^x}$$

représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2) a) Montrer que:  $(\forall x \in \mathbf{IR}); f'(x) = \left( \frac{1-e^x}{1+e^x} \right)^2$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbf{IR}$ .

c) En déduire que  $I(0; 2)$  est un point d'inflexion.

3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$  et interpréter

graphiquement le résultat trouvé.

4) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + 4$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$

5) Etudier la position relative de  $(C_f)$  et  $(D)$ .

6) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbf{IR}$ , et que  $-4 < \alpha < -3$ .

7) En déduire que :  $e^\alpha = -1 - \frac{4}{\alpha}$ .

8) Tracer la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 9:

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{IR}$  par :

$$f(x) = (e^{-x} - 1)^2$$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans

un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .                      (unité: 2cm)

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , et interpréter graphiquement le résultat.

2) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$ .

3) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbf{IR}); f'(x) = 2e^{-x} (1 - e^{-2x})$$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) Montrer que  $(C_f)$  admet un point d'inflexion.

5) Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$

a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$

b) Montrer que:  $(\forall x \in \mathbb{R}^+): g^{-1}(x) = -\ln(1 - \sqrt{x})$

6) Tracer  $(C_f)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère.

**Exercice 10 : (Sujet 2019 Rattrapage)**

**Première partie:** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{IR}^*$  par:

$$f(x) = 2 + 8 \left( \frac{x-2}{x} \right) e^{x-4}$$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (L'unité: 1cm)

- 1) a) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ , et interpréter graphiquement le résultat.
- b) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ , et interpréter graphiquement le résultat.
- 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 3) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbf{IR}^*$  on a:
 
$$f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2 - 2x + 4)e^{x-4}}{x^3}$$
- b) Vérifier que  $(\forall x \in \mathbf{IR}); x^2 - 2x + 4 > 0$
- c) Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; 2]$ , et strictement croissante sur les intervalles  $]-\infty; 0[$  et  $[2; +\infty[$ .
- d) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbf{IR}^*$ .
- 4) Tracer  $(C_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 5) a) Vérifier que la fonction  $\mathbf{H}: x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$  est une primitive de la fonction  $\mathbf{h}: x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$  sur l'intervalle  $[2; 4]$ .
- b) Vérifier que
 
$$(\forall x \in \mathbf{IR}^*); f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{(x-1)}{x^2} e^{x-4}$$
- c) Calculer l'intégrale  $\int_2^4 e^{x-4} dx$ .
- d) Calculer en  $cm^2$  l'aire du domaine plan limité par  $(C_f)$  et l'axe des abscisse et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 4$ .

**Deuxième partie :**

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[2; 4]$  par:
 
$$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$$
- a) Calculer  $g(4)$ .
- b) Vérifier que pour tout  $x$  de  $[2; 4]$ ,
 
$$g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2 (e^{x-4} - 1)$$
- c) Vérifier que pour tout  $x$  de  $[2; 4]$ :  $e^{x-4} - 1 \leq 0$  puis en déduire que pour tout  $x$  de  $[2; 4]$ :  $g(x) \leq 0$ .
- 2) a) Vérifier que pour tout  $x$  de  $[2; 4]$ :

$$f(x) - x = \left( \frac{x-2}{x^2} \right) g(x)$$

- b) En déduire que pour tout  $x$  de  $[2; 4]$ :  $f(x) \leq x$ .
- 3) On considère la suite  $(u_n)$  définie par :
 
$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbf{IN}.$$
- a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbf{IN}$  on a:  $2 \leq u_n \leq 4$ .
- b) Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)$ , puis en déduire quelle est convergente.
- c) Calculer la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 11 :**

**Partie A :** On considère la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = 1 - (1+x)e^x$$

- 1) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
  - 2) Calculer  $g(0)$ . Puis en déduire le signe de  $g(x)$ .
- Partie B :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{IR}$  par :  $f(x) = x(1 - e^x)$ . On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- 2) Montrer que la droite  $(D): y = x$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$ . Et préciser la position relative de  $(D)$  et  $(C_f)$ .
- 3) Montrer que  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.
- 4) a) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a:  $f'(x) = g(x)$
- b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Montrer que  $(C_f)$  admet un point d'inflexion  $I$  dont on déterminera ses coordonnées.
- 6) Construire  $(D)$  et  $(C_f)$ .

**Partie C :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbf{IN}.$$

- a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbf{IN}$  on a:  $-1 \leq u_n \leq 0$
- b) Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)$ , puis en déduire quelle est convergente.
- c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .