Exercices et problèmes

EXERCICE1 : Calculez les intégrales suivantes .

$I_1 = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx$ $\quad$ $I_2 = \int_1^0 (x + e^x)dx$

$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ $\quad$ $I_4 = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)dx$

$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}dx$ $\quad$ $I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2-4)^2}dx$

$I_7 = \int_{-1}^1 x\,|x|\,dx$ $\quad$ $I_8 = \int_0^1 \frac{1}{3}x^3 + 2x - 5\,dx$

$I_9 = \int_0^1 t\left(t^2+1\right)^3 dt$ $\quad$ $I_{10} = \int_0^1 \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt$

$I_{11} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ $\quad$ $I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x\,dx$

$I_{13} = \int_0^3 |2t-1|\,dt$ $\quad$ $I_{14} = \int_{-1}^5 |x-2| + |x-4|\,dt$

$I_{15} = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dt$ $\quad$ $I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dt$

EXERCICE2 :

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$I_1 = \int_0^1 x e^x\,dx$ $\quad$ $I_2 = \int_1^e x\ln x\,.dx$

$I_3 = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ $\quad$ $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$

$I_5 = \int_1^x \ln t\,.dt$ $\quad$ $I_6 = \int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$

$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ $\quad$ $I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$

$I_9 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$ $\quad$ $I_{10} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,.dx$

$I_{11} = \int_1^e x^2\ln x\,.dx$ $\quad$ $I_{12} = \int_0^1 xe^{2x}dx$

$I_{13} = \int_0^x \cos t.e^t\,dt$ $\quad$ $I_{14} = \int_0^x \sin t.e^t\,dt$

$I_{15} = \int_1^{e^2} (x^3+1)\ln(x)dx$

EXERCICE3 :

On Considère les deux intégrales :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3 x}dx$$

1) Calculer I.

2) Considérons $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ et f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

a) Monter que $f'(x)=\dfrac{3}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$.

b) Déterminer une relation entre I et J.

c) En déduire le calcul de J.

EXERCICE4 :

Considérons les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}\ ;\ J=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \ \text{ et } \ K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx$$

1) Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$

a- Calculer la dérivée de f.

b- Calculer la valeur de I.

2) **a-** Vérifier que $J+2I=K$.

b- Monter que $K=\sqrt{3}-J$

c- En déduire les valeurs de J et de K.

EXERCICE5 :

Soit $f:x\mapsto\dfrac{1}{e^x(1-x)}$.

1) Etudier les variations de f.

2) En déduire que : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right):1\le f(x)\le\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right):1+x+\dfrac{x^2}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{e^x(1-x)}$$

c) Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$.

d) Montrer que : $\dfrac{1}{24}\le\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}x^2 f(x)dx\le\dfrac{1}{12\sqrt{e}}$.

EXERCICE6 :

f une fonction définie sur **IR** par : $f(x)=(x+1)e^{-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ **(unité :4 cm).**

1) Déterminer l'aire $S(\lambda)$, de la surface délimité par la courbe (C_f),l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ (avec $\lambda>0$).

2) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)$.

EXERCICE7 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$f(x)=x+3+\dfrac{2(1-\ln x)}{\sqrt{x}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que la droite $(D):y=x+3$ est une asymptote à la courbe (C_f).

b) Etudier la position de (C_f) et (D).

2) Déterminer l'aire $S(\lambda)$ de la surface comprise entre la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\lambda$ avec $\lambda\ge1$.

EXERCICE8 :

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-2)^3}$.

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les réels a et b tel que :

$$\left(\forall x\in D_f\right):f(x)=\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-2)^3}$$

3) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx$.

EXERCICE9 :

Pour tout réel positif a, on définit $I(a)=\displaystyle\int_1^a\frac{\ln x}{x^2}dx$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(a)=\dfrac{\ln(a)-1}{a^2}+1$.

2) En déduire la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

3) On définit maintenant $J(a)=\displaystyle\int_1^a\frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$.

4) Vérifier que : $(\forall x\ge1):x^2\le x^2+1\le2x^2$, puis montrer que $\dfrac{1}{2}I(a)\le J(a)\le I(a)$.

EXERCICE9 :

a- Vérifier que pour tout réel x on a :

$$\frac{1}{(e^x+1)^2}=1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

b- En déduire la valeur de $J=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(e^x+1)^2}$.

c- A l'aide d'une intégration par parties , calculer l'intégrale suivant $K=\displaystyle\int_0^1\frac{x\,e^x}{(e^x+1)^3}dx$