

EXERCICES D'APPLICATION

CALCUL SUR LES LOGARITHMES

EXERCICE 01

Simplifier les écritures suivantes :

$$\ln 7 + \ln\left(\frac{1}{7}\right) ; \ln\left(\frac{1}{16}\right) + 3\ln 2 ; \ln 36 - 2\ln 3$$

$$2\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) ; \ln(e^2\sqrt{8}) - \frac{1}{2}\ln 2 ; \ln(e^{-3}) - \frac{1}{2}\ln(e^6)$$

$$\ln(\sqrt{5}-2) + \ln(\sqrt{5}+2) ; \ln 42 + 2\ln 28 - 3\ln 14$$

$$\ln(\sqrt{\sqrt{11}-3}) + \ln(\sqrt{\sqrt{11}+3}) ; \ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$$

EXERCICE 02

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = \ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{27}\right) + \ln(12\sqrt{3}) + \ln(3\sqrt{3})$$

$$B = \ln(7+4\sqrt{3})^{15} + \ln(7-4\sqrt{3})^{15}$$

$$C = \ln 2 + \ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$$

$$D = \frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$$

$$X = 2\ln(e\sqrt{e}) - 3\ln(e^3) - 2\ln(e^{-6})$$

$$Y = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right)$$

$$Z = \frac{3}{8}\ln(7+4\sqrt{3}) - \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{4}\ln(2-\sqrt{3})$$

EXERCICE 03

Calculer en fonction de  $a = \ln 5$  et  $b = \ln 2$  ce qui suit :

$$x = \ln\left(16\sqrt{\frac{4}{5}}\right) ; y = \ln(1000) ; z = \ln(0,64)$$

$$u = \ln\left(\frac{8}{125}\right) ; v = \ln\left(\frac{5}{16}\right) + \frac{1}{3}\ln 50 - 4\ln\sqrt[3]{5}$$

EXERCICE 04

Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels strictement positifs. On pose :

$$A = \ln a \text{ et } B = \ln b \text{ et } C = \ln c$$

Exprimer ce qui suit en fonction de  $a, b$  et  $c$  :

$$X = \ln\left(a^8 b^9 c^{\frac{3}{2}}\right) ; Y = \ln\left(\frac{a}{b^7}\right) + \ln\left(\frac{a^{-1}}{c^3}\right)$$

$$Z = \ln\left(\sqrt{abc} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{b}\right) ; T = \ln\left(\sqrt[5]{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^{-2}} \cdot c\sqrt{c}}\right)$$

EXERCICE 05

Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs tels que :

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$$

Calculer le rapport  $\frac{a}{b}$ .

EXERCICE 06

Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.

1) Montrer que :  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

2) En déduire que :  $\frac{\ln a + \ln b}{2} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

EXERCICE 07

Soit  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs.

Montrer que :  $(x+y)\ln(x+y) > x\ln x + y\ln y$

EXERCICE 08

Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction numérique  $f$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = \ln(3-2x)$  ; 2)  $f(x) = \ln(x^2-5x)$

3)  $f(x) = \ln|x+1|$  ; 4)  $f(x) = \ln^2 x - 3\ln x$

5)  $f(x) = \ln((x-1)^2)$  ; 6)  $f(x) = \sqrt{2-\ln x}$

7)  $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-1)$

8)  $f(x) = \ln((x+2)(x-1))$  ; 9)  $f(x) = \ln(\ln x)$

10)  $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$  ; 11)  $f(x) = \frac{x+3}{x \ln x}$

12)  $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{x-3}\right)$  ; 13)  $f(x) = \ln\left|\frac{2x+3}{x-5}\right|$

14)  $f(x) = \ln|\sqrt{x}-1|$  ; 15)  $f(x) = \sqrt{x \ln(x+1)}$

16)  $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + \ln x - 6}$  ; 17)  $f(x) = \sqrt{\frac{1-\ln x}{1+\ln x}}$

18)  $f(x) = \frac{\sqrt{2-\ln x}}{\ln^2 x - 3 \ln x - 4}$ .

## EXERCICE 09

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $\ln x = 0$  ; 2)  $\ln x = 1$  ; 3)  $2 \ln x + 3 = 0$

4)  $\ln x = 3 \ln 2$  ; 5)  $2 \ln x = \ln 3 + \ln 27$

6)  $2 \ln x = \ln(x^2)$  ; 8)  $\ln^2 x = 4$  ; 9)  $\ln x^2 = -2$

## EXERCICE 10

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $\ln(7x-1) = \ln(5x+1)$  ; 2)  $\ln(x^2-x) = \ln(x+1)$

3)  $\ln(x-3) + \ln(x-1) = \ln(2x+3)$ .

4)  $\ln[(x-3)(x-1)] = \ln(2x+3)$ .

5)  $\ln(x-1) + \ln(x+3) = \ln(x^2+4x+9)$ .

6)  $(1+3 \ln x)(1-\ln x) = 0$  ; 7)  $\ln^2 x + \ln x = 0$

8)  $(\ln x)^3 = 3 \ln(x^2)$  ; 9)  $3(\ln x)^2 - 7 \ln x + 10 = 0$

10)  $\frac{1}{2} \ln(4x) = \ln(3-2x) - \ln(\sqrt{2x+1})$ .

11)  $\ln(\sqrt{2x-3}) = \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x$ .

12)  $\ln|x-1| + \ln|2x-1| = 0$  ; 13)  $\ln|3x+1| = 5 \ln 2$

14)  $\ln\left(\frac{x+5}{x+2}\right) + 2 \ln(x+2) = \ln(3x+9)$

15)  $\ln(\sqrt{2x+1}) = -\frac{1}{2} \ln x$

## EXERCICE 11

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $2 \ln x - 5 \geq 0$  ; 2)  $1 - \ln x < 0$  ; 3)  $\ln x \leq -1$

4)  $\ln(x+5) < \ln(3x+11)$  ; 5)  $(x-1) \ln x \geq 0$

6)  $\ln^2 x - \ln x \geq 0$  ; 7)  $\ln^2 x - 6 \ln x + 5 \leq 0$

8)  $(\ln x - 1)(3 - 2 \ln x) \geq 0$  ; 9)  $\ln(x^2 + 3x + 3) \geq 0$

10)  $\ln(2x-3) + 2 \ln(x+1) > \ln(x-3)$

11)  $\frac{\ln x}{\ln x + 2} \geq 0$  ; 12)  $\frac{2 - \ln x}{\ln x} \leq 3$  ; 13)  $\ln^2 x - 4 \geq 0$

14)  $\ln(x+1) - \ln x \leq \ln(2-x)$  ; 15)  $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln x$

16)  $\ln x + \ln(4-x) > 0$  ; 17)  $\ln(x^2 - 5) \leq \ln(-4x)$

18)  $\ln \sqrt{2x-3} + \ln(x+1) < \frac{1}{2} \ln(x-3)$ .

## EXERCICE 12

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$(E_1) : \ln(\sqrt{x-1}) = \ln(3-x) - \frac{1}{2} \ln(x-1)$

$(E_2) : \ln^3 x - 3 \ln^2 x - 6 \ln x + 8 = 0$

$(E_3) : \ln|x-1| + \ln|x+2| = \ln|4x^2 + 3x - 7|$

2) Résoudre les inéquations suivantes :

$(I_1) : \ln(x^2 - 2x) \leq \ln x$  ;  $(I_2) : \ln\left(\frac{3x-7}{4x+5}\right) \geq 0$

$(I_2) : -\ln^2 x - \ln x + 2 > 0$  ;  $(I_4) : \frac{\ln|x-2|}{3 + \ln x} > 0$

$(I_5) : 0 < \frac{\ln x}{\ln x - 1} < 1$  ;  $(I_6) : \ln^3 x - 3 \ln^2 x + 2 > 0$

## EXERCICE 13

Pour chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel  $n$  vérifiant l'inégalité correspondante :

1)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-5}$  ; 2)  $(1,1)^n \geq 100$  ; 3)  $\frac{1}{4^n} < 0,03$

4)  $25\left(1 + \frac{7}{100}\right)^n \geq 4$  ; 5)  $40\left(1 - \frac{5,5}{100}\right)^n \leq 1$

## EXERCICE 14

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 4 \ln x - 3 \ln y = 6 \\ 2 \ln x + 5 \ln y = 16 \end{cases} ; \begin{cases} 3 \ln x - 5 \ln y = -9 \\ 2 \ln x + \ln y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \ln x + \ln y = 4 \ln 2 \end{cases} ; \begin{cases} 4x + 5y = 8 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 - \ln 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 13 \end{cases} ; \begin{cases} \ln x \times \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \\ \ln x - \ln y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(xy) = -5 \\ \ln x \cdot \ln y + 14 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x + y = e \\ \ln x + \ln y = 2 + \ln 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \ln x + \ln y = \ln 12 \end{cases} ; \begin{cases} \ln(x^5) + \ln(y^2) = 16 \\ \ln(x^3) + \ln(y^3) = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(x^3 y^2) = 5 \\ \ln x - 4 \ln \sqrt{y} = -3 \end{cases} ; \begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ \ln(-x) + \ln(-y) = \ln 24 \end{cases}$$

## CALCUL DES LIMITES

## EXERCICE 15

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\ln x} + x \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3x - 2 - \frac{\ln x}{x^5} \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 3x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 5 \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x - 3 \ln x + 2) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x - 3 \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \ln x}{4x + \ln x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2) \ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + 3x) - x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(x^2 - 1)) ; \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \ln \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

## EXERCICE 16

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln x - 2}{1 + \ln x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \ln(-x)}{3 + \ln(-x)} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x + \ln x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x (2 \ln(1 + \sqrt{x}) - \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4 + \ln(x+2)}{x+2} ; \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x-3})}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 5x + 6) \ln(x-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2 x - 3 \ln x + 2}{x-e} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{2 - \ln x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{3x-2}{4x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3 + 1} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(5x+3)} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \ln(x^3 - 8) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 3x + 7)}{2x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{3x}{x-2} + \ln(x-2) \right) ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \ln \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) \ln(x^2 + x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 3} - x)$$

## EXERCICE 17

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(2x + \sqrt{x}) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln^5 x ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{4x - \pi} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 + 5x + 2)}{1 - \ln x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2 + x - 2} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x \ln x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} + \ln \sqrt{x-1} \right) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln|x| + 3x}{\ln|x| - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{2-3x}{2+5x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left( \frac{1+5 \sin x}{1+3 \tan x} \right)$$

## CALCUL DES FONCTIONS DÉRIVÉES

### EXERCICE 18

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  puis calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in I$  :

1)  $f(x) = x \ln x - x + 1$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

2)  $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$  et  $I = ]-\infty; 0[$ .

3)  $f(x) = \ln|x^2 - 8x + 12|$  et  $I = ]2; 6[$ .

4)  $f(x) = \ln(\ln x)$  et  $I = ]1; +\infty[$ .

5)  $f(x) = \ln^2 x - 3 \ln x + 5$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

6)  $f(x) = \frac{3 \ln x + 2}{\ln x - 1}$  et  $I = ]0; e[$ .

7)  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$  et  $I = \mathbb{R}$ .

8)  $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$  et  $I = ]-\infty; -\frac{1}{2}[$ .

9)  $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$  et  $I = ]0; e[$ .

10)  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

11)  $f(x) = \ln(\sqrt{1-4x})$  et  $I = ]-\infty; \frac{1}{4}[$ .

12)  $f(x) = \ln\left|\frac{x^2 - 4x}{x + 4}\right|$  et  $I = ]4; +\infty[$ .

13)  $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3 \ln x + 5}$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

14)  $f(x) = \ln|x + 3 - \sqrt{x^2 + 9}|$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

15)  $f(x) = \ln(\tan x)$  et  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[$ .

16)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \ln^2 x}}$  et  $I = ]e^{-1}; e[$ .

17)  $f(x) = x^2 \left(2 - \frac{3}{\ln x}\right)^4$  et  $I = ]1; +\infty[$ .

### EXERCICE 20

En utilisant la dérivée logarithmique, déterminer la dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{(x^3 + 1)^5}$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

2)  $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 3}}{\sqrt{x^4 + 3}}\right)^5$  et  $I = ]1; +\infty[$ .

3)  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4 + 1}}{x\sqrt{x^2 + 4}}$  et  $I = \mathbb{R}$ .

## VARIATIONS ET ÉTUDE DE FONCTIONS

### EXERCICE 21

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$  et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$ .
- 2) Montrer que la droite  $(\Delta): x = 1$  est un axe de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 3) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- 4) Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 5) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in D_f$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 6) Déterminer les points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}_f$  avec l'axe des abscisses.
- 7) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 8) Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $I = ]2; +\infty[$ .
  - a) Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.
  - b) Calculer  $(g^{-1})'(0)$ .

**EXERCICE 22**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]1; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)\ln(x+1) & \text{si } x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que  $f$  est continue à droite en  $x_0 = -1$ .
- 2) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite au point  $x_0 = -1$  puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

Que peut-on déduire ?

- 4) Étudier les variations de la fonction  $f$ .
- 6) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**EXERCICE 23**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(x) = \frac{2x+1-\ln x}{x}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 3) Étudier les variations de la fonction  $f$ .
- 4) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^2}$  puis étudier la concavité de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 5) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

**EXERCICE 24**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
b) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote oblique de  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .
- c) Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $(D)$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 3) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

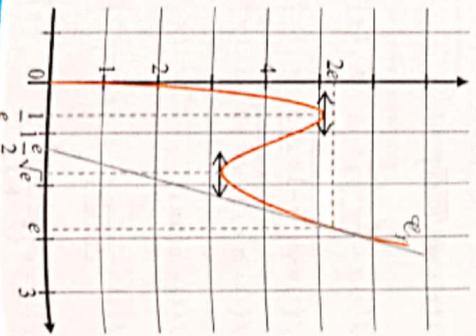
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[ \ln x + 2(\sqrt{x} - 1) \right]$$

- b) Montrer que  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $]0; 1[$  et que  $f$  est croissante sur  $]1; +\infty[$  puis dresser le tableau de variations de  $f$ .

- 4) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

**EXERCICE 25**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  et dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est tracée en-dessous avec sa tangente au point d'abscisse  $e$ .



On admet l'égalité suivante :

$$f(x) = 2x \left[ a \ln^2 x + b \ln x + c \right]$$

où  $a, b$  et  $c$  désignent des réels.

- a) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .
- b) À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de  $f'(e), f'(\sqrt{e})$  et  $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ .

c) En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  :

$$f(x) = 2x \left[ 2 \ln^2 x - 3 \ln x + 2 \right]$$

- 2) a) Lire graphiquement le sens de variations de la fonction  $f$ .
- b) Étudier le signe de  $f''(x)$  et retrouver ainsi les résultats précédents.

**EXERCICE 26**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $D = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x \left( 1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable à droite en 0.
- 3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 4) Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 5) a) Montrer que pour tout  $x \in D - \{0\}$  :

$$f'(x) = \left( \frac{\ln x - 1}{\ln x} \right) \left( \frac{\ln^2 x - \ln x + 2}{\ln^2 x} \right)$$

- b) Étudier le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

- 6) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**CALCUL DES PRIMITIVES**

**EXERCICE 27**

Pour chacun des cas suivants, déterminer toutes les primitives de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  :

- 1)  $f(x) = -\frac{5}{x}$  :  $I = ]0; +\infty[$
- 2)  $f(x) = -\frac{1}{x}$  :  $I = ]-\infty; 0[$
- 3)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  :  $I = ]-2; +\infty[$
- 4)  $f(x) = \frac{1}{3-4x}$  :  $I = ]1; +\infty[$
- 5)  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$  :  $I = \mathbb{R}$
- 6)  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4}$  :  $I = \mathbb{R}$
- 7)  $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-5}$  :  $I = ]2; 5[$
- 8)  $f(x) = \frac{2x^3+x^2+x-7}{x}$  :  $I = ]0; +\infty[$

**EXERCICE 28**

Pour chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $I$  :

- 1)  $g(x) = x^2 - 2 - \frac{4}{x+1}$  :  $I = ]0; +\infty[$
- 2)  $g(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x \ln x}$  :  $I = ]1; +\infty[$
- 3)  $g(x) = \frac{2}{x\sqrt{1-\ln x}}$  :  $I = ]0; e[$
- 4)  $g(x) = \tan x$  :  $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
- 6)  $g(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  :  $I = ]-1; +\infty[$
- 7)  $g(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}$  :  $I = ]0; +\infty[$

## EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

## EXERCICE 34

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 (\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.
- 2) a) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :
 
$$f(x) = 4x(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$$
 b) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat.
- 3) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et étudier son signe.
- 4) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

## EXERCICE 35

- 1) Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$$

- a) Étudier les variations de la fonction  $g$ .
  - b) Calculer  $g(1)$  et en déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x > 1$  et  $g(x) < 0$  pour tout  $0 < x < 1$ .
- 2) Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$f(x) = (x-1) \ln x$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- a) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b) Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- c) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f'(x) = g(x)$ .
- d) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- e) Résoudre dans  $\mathbb{R}_+^*$  l'inéquation :  $f(x) \geq x - 1$ .
- e) Construire la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

## EXERCICE 36

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que :  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ .
- 2) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 3) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
b) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = \frac{x}{2} + 2$  est une asymptote oblique de la courbe  $\mathcal{C}_f$  aux voisinages de  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- c) Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $(D)$ .
- 4) Montrer que le point  $I(0; 2)$  est un centre de symétrie pour la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 5) Construire la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

## EXERCICE 37

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$u_0 = e^3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{e^2 u_n^2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq e^2$ .
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \ln(u_n) - 2$ .  
a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.  
b) Exprimer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

## EXERCICE 38

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{1 + \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que :  $D_f = \left[0; \frac{1}{e} \cup \right] \frac{1}{e}; +\infty[$ .
- 2) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.
- 3) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^+} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^-} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 4) Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 5) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 6) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et en déduire la nature de la branche infinie au voisinage de  $+\infty$ .  
b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  est une asymptote oblique de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 7) a) Montrer que pour tout  $x \in D_f - \{0\}$  :

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{(1 + \ln x)^2}$$

et en déduire que :  $(\forall x \in D_f - \{0\}) f'(x) > 0$ .

- b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
  - 8) Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.
  - 9) a) Montrer que pour tout  $x \in D_f - \{0\}$  :
- $$f''(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{x(1 + \ln x)^4}$$
- b) Étudier la concavité de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
  - 10) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
  - 11) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $I = \left] \frac{1}{e}; +\infty[$ .

- a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.
- b) Donner le tableau de variations de  $g^{-1}$ .
- c) Déterminer  $(g^{-1})' \left( \frac{e}{2} \right)$ .
- c) Tracer  $\mathcal{C}_{g^{-1}}$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## EXERCICE 39

Première Partie :

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$g(x) = (\ln x)^3 + \ln x - 2$$

- a) Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- b) Calculer  $g(e)$  et en déduire le signe de  $g(x)$ .

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que :  $D_f = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .
- 2) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- 3) Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 4) a) Montrer que :  $(\forall x \in D_f) f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^3}$ .  
b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 5) Écrire l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $e$ .
- 6) Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  dans l'intervalle  $\left] \frac{1}{e^e}; \frac{1}{e} \right[$  tel que :  $f(\alpha) = 0$ .
- 7) Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la courbe  $(\Gamma)$  d'équation  $y = \ln x$ .
- 8) Tracer les courbe  $\mathcal{C}_f$  et  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## EXERCICE 40

**Première Partie :**

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $h(x) = x - \ln x$ .

- 1) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .
- 2) Calculer  $h'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  puis dresser le tableau de variations de  $h$ .
- 3) En déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) x - \ln x \geq 1$ .

**Deuxième Partie :**

On considère la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Vérifier que la fonction  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Que peut-on déduire ?
- 3) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- 4) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 5) a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$   
b) Étudier le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 6) Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  coupe la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  en deux points dont on déterminera les coordonnées.
- 7) a) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :  
$$f(x) - x = \frac{x(1 - h(x))}{h(x)}$$
  
b) En déduire la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $(\Delta)$ .
- 8) Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$

au point d'abscisse 1.

- 9) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**Troisième Partie :**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$ .
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de 7) de la deuxième partie)
- 3) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente puis déterminer sa limite.

## EXERCICE 41

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur l'intervalle

$$\text{par } I = [0; +\infty[ : f(x) = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . Que peut-on déduire ?
- 3) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.  
(On pourra poser :  $t = x + \sqrt{x^2 + 2x}$ ).
- 4) a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$ .  
b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 5) Construire la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- 6) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  qu'on déterminera.  
b) Donner le tableau de variations de  $f^{-1}$ .  
c) Montrer que la fonction  $f^{-1}$  est dérivable en  $\ln(2 + \sqrt{3})$  puis déterminer  $(f^{-1})'(\ln(2 + \sqrt{3}))$ .  
d) Tracer  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## EXERCICE 42

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions numériques définies sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$$

et :  $g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$

1) a) Montrer que pour tout  $x \in [1; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

b) Dresser les tableaux de variations de  $f$  et  $g$ .

c) En déduire que pour tout  $x \in [1; +\infty[$  :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

2) On considère la suite numérique  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

a) Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n \geq \ln(n+1)$ .

c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## EXERCICE 43

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[1; +\infty[$  par :

$$f(x) = x\sqrt{\ln x}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]1; +\infty[$  :

$$\frac{f(x)}{x-1} = x \sqrt{\frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x-1}}$$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que :  $(\forall x \in ]1; +\infty[) f'(x) = \frac{2 \ln x + 1}{2\sqrt{\ln x}}$

Puis dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

4) a) Montrer que :

$$(\forall x \in ]1; +\infty[) f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{4x\sqrt{\ln^3 x}}$$

b) En déduire que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un unique point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5) Construire la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

6) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  qu'on déterminera.

b) Donner le tableau de variations de  $f^{-1}$ .

c) Montrer que la fonction  $f^{-1}$  est dérivable en  $e$  puis calculer  $(f^{-1})'(e)$ .

d) Tracer  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## EXERCICE 44

Première Partie :

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{x}{x+2}$$

1) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

2) Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  puis dresser le tableau de variations de  $g$ .

3) En déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) g(x) > 0$ .

Deuxième Partie :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

2) a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

- b) Montrer que la droite (D) d'équation  $y = x + 2$  est une asymptote oblique de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 3) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 4) a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f'(x) = g(x)$ .  
b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 5) Construire la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**EXERCICE 45**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.
- 2) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 3) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . (Poser :  $X = \frac{2}{x}$ )  
Que peut-on déduire à propos de la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
- 4) a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  puis vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$   
b) Étudier les variations de la fonction  $f'$  et déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ .  
c) En déduire le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- 5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 2.
- 6) Construire (T) et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 7) Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  
$$h(x) = \frac{2x}{x+2}$$

- a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f(x) - h(x) = xf'(x)$ .
- b) En déduire la position relative des courbes des fonctions  $h$  et  $f$ .
- 8) On propose dans cette question la détermination de toutes les fonctions  $g$  dérivables sur  $]0; +\infty[$  et vérifiant la relation (R) suivante :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) g(x) - xg'(x) = h(x)$$

On pose :  $G(x) = \frac{g(x)}{x}$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

- a) Montrer que la fonction  $g$  vérifie la relation (R) si, et seulement si :  
$$(\forall x \in ]0; +\infty[) G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$
- b) En déduire les fonctions  $g$  vérifiant (R).

**EXERCICE 46**

Première Partie :

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$g(x) = x - 2 \ln x$$

- 1) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
- 2) Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  puis dresser le tableau de variations de  $g$ .
- 3) En déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) g(x) > 0$ .

Deuxième Partie :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$f(x) = x + 1 - \ln^2 x$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (poser :  $x = X^2$ )  
b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

c) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{1}{e}; e \right]$$

3) a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ .

b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

4) a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f''(x) = \frac{2(-1 + \ln x)}{x^2}$ .

b) Étudier la concavité de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

5) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

6) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  qu'on déterminera.

c) Montrer que la fonction  $f^{-1}$  est dérivable en 2 puis calculer  $(f^{-1})'(2)$ .

d) Tracer  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### Troisième Partie :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{e} \leq u_n \leq e$ .

2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante. (On pourra utiliser le résultat de 2) c) de la deuxième partie).

3) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente puis déterminer sa limite.

### EXERCICE 47

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $f(x) = \frac{2 + \ln x}{\sqrt{x}}$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

3) a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f''(x) = \frac{3 \ln x - 2}{4x^2 \sqrt{x}}$ .

b) Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

4) a) Déterminer l'intersection de la courbe  $\mathcal{C}_f$  avec l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

### EXERCICE 49

#### Première Partie :

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)$$

1) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

2) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  :

$$g'(x) = 2x[1 - \ln(x^2 + 1)]$$

b) Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $[0; \sqrt{e-1}]$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $[\sqrt{e-1}; +\infty[$ .

c) Donner le tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

3) Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  dans l'intervalle

$$[\sqrt{e-1}; \sqrt{e^2-1}] \text{ tel que : } g(\alpha) = 0.$$

4) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

#### Deuxième Partie :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable à droite en 0 puis déterminer  $f'_d(0)$ .

2) a) Montrer que :  $(\forall x \geq 1) 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$ .

- b) En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 3) a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$ .
- b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 4) Montrer que :  $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ .
- 5) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## EXERCICE 49

## Première Partie :

Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$h(x) = x + 1 + \ln x$$

- 1) a) Calculer  $h'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
- b) Donner le tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 2) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  puis vérifier que :  $\frac{1}{e^2} < \alpha < \frac{1}{e}$ .
- 3) En déduire que  $h(x) > 0$  pour tout  $x \in ]\alpha; +\infty[$  et que  $h(x) < 0$  pour tout  $x \in ]0; \alpha[$  puis dresser le tableau de signe de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

## Deuxième Partie :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.
- 2) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 3) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 4) a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

- b) Vérifier que  $f(\alpha) = -\alpha$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

6) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$f''(x) = -\frac{2x \ln x + (x^2 - 1)}{x(x+1)^3}$$

- b) Montrer que  $2x \ln x$  et  $x^2 - 1$  ont le même signe sur chacun des intervalles  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ .
- c) Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.
- 7) Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.
- 8) Construire  $(T)$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 9) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]\alpha; +\infty[$ .
- a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.
- b) Vérifier que  $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1$ .
- c) Montrer que la fonction  $g^{-1}$  est dérivable en 1 et que :  $(g^{-1})'(1) = \frac{1}{\alpha}$ .

## EXERCICE 50

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On considère la fonction numérique  $f$

$$\text{définie par : } f(x) = 2 \ln \frac{x}{x+a} + \frac{a}{x} + \frac{a}{x+a}.$$

- 1) Montrer que :  $D_f = ]-\infty; -a[ \cup ]0; +\infty[$ .
- 2) Montrer que pour tout  $x \in D_f$  :
- $$(-a-x) \in D_f \text{ et } f(-a-x) + f(x) = 0$$
- Interpréter géométriquement ce résultat.
- 3) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$f(x) = \frac{2x \ln x + a}{x} + \frac{a}{x+a} - 2 \ln(x+a)$$

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis montrer que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -a \\ x < -a}} f(x) = -\infty$$

c) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

4) Étudier les variations de la fonction  $f$ .

### EXERCICE 51

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + (\ln x)^2} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

b) En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$

4) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{(\ln x - 1)^2}{(1 + \ln^2 x)^2}$$

b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

4) a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  puis vérifier

que :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+) f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$

b) Étudier les variations de la fonction  $f'$  et déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ .

c) En déduire le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

5) Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.

6) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f(x) \leq x$ .

Interpréter géométriquement ce résultat.

7) Construire  $(T)$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

8) Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 \leq u_n \leq e$ .

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question 6).

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente puis déterminer sa limite.

### EXERCICE 52

Une vibration sonore se mesure par sa fréquence et donc son intensité  $(I)$  exprimée en  $W/m^2$ . Le décibel (dB) est, quant à lui, utilisé pour exprimer le rapport de deux intensités acoustiques. On définit le nombre de décibels, que l'on note  $N$ , engendré par une vibration

sonore d'intensité  $I$  par :  $N = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$ .

( $I_0$  est la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine ;  $I_0$  est voisin de  $10^{-12} W/m^2$ ).

1) Que vaut  $N$  lorsque  $I = I_0$  ? Lorsque  $I = 10I_0$  ?

2) Le chuchotement (discret) de deux élèves en classe est voisin de 20 dB. Qu'en est-il de l'intensité sonore émise par rapport à  $I_0$  ? Même question, pour une conversation de deux personnes, émettant 50 dB.

3) On dit que le seuil de douleur est atteint à partir de 120 dB. Qu'en est-il alors de l'intensité émise par rapport à  $I_0$  ?

4) Le dernier concert des Stringers in the night, a été mesuré de 105 dB !

Qu'en est-il du rapport  $\frac{I}{I_0}$  ?



### EXERCICE 53

#### Première Partie :

Soit  $u$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

- 1) Étudier les variations de la fonction  $u$  et préciser ses limites en 0 et en  $+\infty$ .
- 2) a) Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
b) Vérifier que :  $1,3 < \alpha < 1,4$   
(on donne :  $\ln(1,3) \approx 0,26$  et  $\ln(1,4) \approx 0,34$ ).
- 3) Déterminer le signe de  $u(x)$  suivant les valeurs de la variable  $x$ .
- 4) Justifier que :  $\ln \alpha = 1 - \alpha^2$ .

#### Deuxième Partie :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2}$$

- 1) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $u(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- 2) En déduire les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

#### Troisième Partie :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on note :

- $(\Gamma)$  la courbe représentative de la fonction  $\ln$  (logarithme népérien) ;
- $A$  le point de coordonnées  $(0; 2)$  ;
- $M$  le point de  $(\Gamma)$  d'abscisse  $x \in ]0; +\infty[$ .

- 1) Montrer que la distance  $AM$  est donnée par :

$$AM = f(x)$$

- 2) a) Montrer que la distance  $AM$  est minimale en un point de  $(\Gamma)$ , noté  $P$ , dont on précisera les coordonnées.

- b) Montrer que :  $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$ .

- 3) La droite  $(AP)$  est-elle perpendiculaire à la tangente à  $(\Gamma)$  au point  $P$  ? Justifier la réponse

### EXERCICE 54

On considère la suite numérique  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ par : } u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

- 1) Calculer :  $u_1$  ;  $u_2$  ;  $u_3$  ;  $u_4$ .
- 2) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

- 3) Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = \ln x - (x-1)$$

- a) Étudier les variations de la fonction  $f$  puis en déduire que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \ln x \leq x-1$ .

- b) En utilisant le changement de variable  $X = \frac{1}{x}$  dans l'inégalité précédente, montrer que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$$

- c) Dédurre des deux questions précédentes que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln \left( \frac{p+1}{p} \right) \leq \frac{1}{p}.$$

- 4) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

- a) Écrire l'encadrement du 3) c) pour tous les valeurs de  $p$  allant de  $n$  à  $2n-1$ .
- b) En additionnant membre à membre les inégalités obtenues, démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

- c) En déduire un encadrement de  $\ln 2 - u_n$  puis prouver que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ln 2$ .

# PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

## SE PRÉPARER AUX DEVOIRS

### DEVOIR 1

#### Première Partie :

On considère les fonctions numériques  $g$  et  $h$  définies sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x - 1 - \ln x \quad \text{et} \quad h(x) = x + (x - 2) \ln x$$

1) a) Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  puis étudier les variations de la fonction  $g$ .

b) En déduire que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad g(x) \geq 0$ .

2) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$h(x) = 1 + g(x) + (x - 1) \ln x$$

b) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad (x - 1) \ln x \geq 0$ .

c) En déduire que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad h(x) > 0$ .

#### Deuxième Partie :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis étudier la branche infinie de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

2) a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ .

b) En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

3) Soit  $(\Delta)$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(1; 1)$ .

a) Montrer que  $y = x$  est une équation cartésienne

de la droite  $(\Delta)$ .

b) Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$$

c) Étudier le signe de  $f(x) - x$  puis en déduire la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $(\Delta)$ .

4) Construire  $(\Delta)$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(On admet que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un point

d'inflexion dont l'abscisse appartient à  $\left]1; \frac{3}{2}\right[$ )

#### Troisième Partie :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$u_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < e$ .

2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. (On pourra utiliser le résultat de 3) c) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente puis déterminer sa limite.

### DEVOIR 2

#### Première Partie :

Soit  $g$  fonctions numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x - 1 + 2 \ln x$$

1) Étudier les variations de la fonction  $g$ .

2) Calculer  $g(1)$  puis déterminer le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

3) En déduire que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$x > 1 \Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \quad \text{et} \quad 0 < x < 1 \Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

#### Deuxième Partie :

Soit  $f$  fonctions numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité : 2cm)

1) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable à droite en 0.

2) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ .

3) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

4) Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

5) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une

solution unique  $\alpha$  tel que :  $\frac{7}{4} < \alpha < 2$ .

6) Soit  $(\Delta)$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $O$ .

a) Montrer que  $y = x$  est une équation cartésienne de la droite  $(\Delta)$ .

b) Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $(\Delta)$ .

7) Construire  $(\Delta)$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### Troisième Partie :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$u_0 \in ]0; 1[ \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < u_n < 1$ .

2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

3) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente puis déterminer sa limite.

### DEVOIR 3

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0; 2[$  par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ .

b) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; 2[) f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$ .

c) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

2) a) Montrer que le point  $A(1; 0)$  est un centre de symétrie pour la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

b) Écrire l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(1; 0)$ .

3) Pour tout  $x \in ]0; 2[$ , on pose :  $\varphi(x) = f(x) - x$ .

a) Montrer que :  $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$  et  $\varphi\left(\frac{7}{4}\right) > 0$ .

(On prend :  $\ln 3 \approx 1,1$  et  $\ln 7 \approx 1,94$ )

b) En déduire que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que :  $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$  puis

interpréter géométriquement le résultat.

4) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### DEVOIR 4

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) Montrer que :  $D_f = [0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .

2) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .

3) Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

4) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.

5) Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

6) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in D_f - \{0\}$ .

7) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

8) Écrire l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(e; 0)$  puis construire la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

## DEVOIR 5

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 2cm)

### Première Partie :

1) Montrer l'ensemble de définition de la fonction  $f$

est :  $D_f = ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$

2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ . Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

En déduire que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet, au voisinage de  $+\infty$ , une asymptote que l'on déterminera.

c) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  puis interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que pour tout  $x \in D_f$  :

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$$

b) Montrer que la fonction  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $]0; 1]$  et croissante sur chacun des intervalles  $[1; e[$  et  $[e; +\infty[$ .

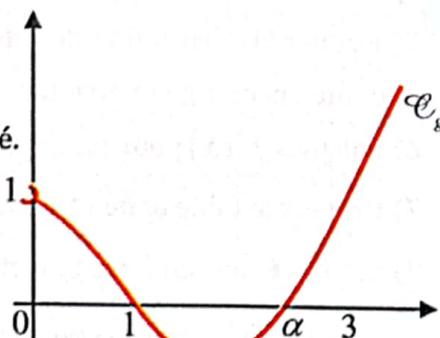
c) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$ .

### Deuxième Partie :

Soit  $g$  fonctions numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$$

et soit  $\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (Voir figure)



1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions dans  $]0; +\infty[$  de l'équation :  $g(x) = 0$ .

b) On donne le tableau de valeurs suivant :

$x$	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	- 0,14	- 0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  telle que :  $g(x) = 0$ .

2) a) Vérifier que pour tout  $x \in D_f$  :

$$f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$$

b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  coupe la courbe  $\mathcal{C}_f$  aux deux points d'abscisses 1 et  $\alpha$ .

c) Déterminer, à partir de la courbe  $\mathcal{C}_g$ , le signe de  $g(x)$  sur  $[1; \alpha]$  et montrer que  $f(x) - x \leq 0$  pour tout  $x \in [1; \alpha]$ .

3) Construire dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , la droite  $(\Delta)$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

### Troisième Partie :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq \alpha$ .

2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) c) de la deuxième partie)

3) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente puis déterminer sa limite.

## SE PRÉPARER AUX EXAMENS

### PROBLÈME 1

#### Première Partie :

Soit  $g$  fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$$

- 1) Vérifier que :  $g(1) = 0$ .
- 2) À partir du tableau de variations de la fonction  $g$  en-dessous :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Montrer que  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]0; 1]$  et que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [1; +\infty[$ .

#### Deuxième Partie :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 1 cm)

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
b) Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$ .
- 3) a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
b) En déduire que la fonction  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $]0; 1]$  et croissante sur  $[1; +\infty[$ .  
c) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

- 4) a) Résoudre dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  l'équation :

$$\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$$

- b) En déduire que  $\mathcal{C}_f$  coupe la droite  $(D)$  en deux points dont on déterminera les coordonnées.
- c) Montrer que pour tout  $x \in [1; 2]$  :  $f(x) \leq x$  et en déduire la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $(D)$  sur l'intervalle  $[1; 2]$ .
- 5) Construire  $(D)$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
(On admet que  $\mathcal{C}_f$  possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2,4 et 2,5).

#### Troisième Partie :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$u_0 = \sqrt{3} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 \leq u_n \leq 2$ .
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
(On pourra utiliser le résultat de la question 4) c) de la deuxième partie).
- 3) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente puis déterminer sa limite.

### Examen National 2017 (Session Normale)

### PROBLÈME 2

#### Première Partie :

Soit  $g$  fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2 \ln x$$

Le tableau en-dessous donne les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(1)$	$+\infty$

1) Calculer  $g(1)$ .

2) Dédurre à partir du tableau que :

$$g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in ]0; +\infty[$$

### Deuxième Partie :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 2 cm)

1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . (Pour calculer

la limite, on pourra écrire  $f(x)$  sous la forme :

$$f(x) = x \left[ \frac{3}{x} - 3 + 2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \ln x \right]$$

b) Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinages de  $+\infty$ .

3) a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f'(x) = g(x)$ .

b) En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

4) a) Montrer que  $I(1; 0)$  est un point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

b) Montrer que  $y = x - 1$  est une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en ce point.

c) Construire, dans le même repère, la droite  $(T)$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

5) Résoudre graphiquement dans l'intervalle  $]0; +\infty[$

$$\text{l'inéquation : } (x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$$

Examen National 2016 (Session De Rattrapage)

## PROBLÈME 3

### Première Partie :

Soit  $g$  fonctions numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 1 - x + x \ln x$$

1) a) Montrer que  $g'(x) = \ln x$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

b) Montrer que  $g$  est décroissante sur  $]0; 1]$  et que  $g$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .

2) Calculer  $g(1)$  et en déduire que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) g(x) \geq 0$$

### Deuxième Partie :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 1 cm)

1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

(Pour calculer la limite, remarquer que :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2}$$

2) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ . En déduire la nature de la branche infinie de  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

3) a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ .

b) Interpréter géométriquement le résultat  $f'(1) = 0$ .

c) Montrer que  $f$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

4) Construire  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(On admet que  $\mathcal{C}_f$  a deux points d'inflexion dont l'un a pour abscisse 1 et l'autre a une abscisse comprise entre 2 et 2,5. On prend :  $f(0,3) \approx 0$ ).

5) Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$$

a) Montrer que la fonction  $f$  est paire et que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) h(x) = f(x)$$

b) Construire, dans le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ,

la courbe  $\mathcal{C}_h$  de la fonction  $h$ .

**Examen National 2015 (Session De Rattrapage)**

### PROBLÈME 4

Première Partie :

Soit  $g$  fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

1) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ .

En déduire que  $g$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

2) Vérifier que  $g(1) = 0$  et en déduire que :

•  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]0; 1]$ .

•  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [1; +\infty[$ .

Deuxième Partie :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère

orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 1 cm)

1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Interpréter géométriquement ce résultat.

2) a) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$  puis montrer

que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . (On pourra poser  $t = \sqrt{x}$ )

c) Déterminer la branche infinie de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

3) a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$

puis en déduire que :

• la fonction  $f$  est décroissante sur  $]0; 1]$ .

• la fonction  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .

b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  puis en déduire que :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) f(x) \geq 2$$

4) Construire la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(On admet que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet unique point d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer)

**Examen National 2014 (Session Normale)**

### PROBLÈME 5

Première Partie :

Soit  $g$  fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 - x - \ln x$$

1) a) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$$

b) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$$

et en déduire que la fonction  $g$  est croissante sur  $]0; 1]$  et décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

2) Montrer que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

(Remarquer que :  $g(1) = 0$ )

Deuxième Partie :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 1 cm)

1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

(Remarquer que :  $f(x) = x^2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} - \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 \right)$ )

c) En déduire que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une branche parabolique au voisinage de  $+\infty$  dont on déterminera la direction.

2) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = 2 \left( \frac{x^2 - \ln x}{x} \right)$$

b) Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$$

et en déduire que  $f$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

3) a) Montrer que  $y = 2x - 2$  est une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $A(1; 0)$ .

b) Construire, dans le même repère, la droite  $(T)$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$ . (On admet que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet  $A(1; 0)$  comme unique point d'inflexion).

### Examen National 2013 (Session De Rattrapage)

#### PROBLÈME 6

##### Première Partie :

Soit  $g$  fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$$

1) Montrer que  $x^2 - 1$  et  $2x^2 \ln x$  ont le même signe sur l'intervalle  $]0; 1[$  puis en déduire que  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]0; 1[$ .

2) Montrer que  $x^2 - 1$  et  $2x^2 \ln x$  ont le même signe sur  $]1; +\infty[$  puis en déduire que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ .

##### Deuxième Partie :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln x$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère

orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 2 cm)

1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ (On pourra écrire } \frac{f(x)}{x} \text{ sous}$$

$$\text{la forme : } \frac{f(x)}{x} = \left( \frac{x^2 - 1}{x} \right) \ln x \text{ ) .}$$

En déduire que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une branche parabolique au voisinage de  $+\infty$  dont on déterminera la direction.

2) a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

et interpréter géométriquement  $f'(1) = 0$ .

b) En déduire que la fonction  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $]0; 1[$  et croissante sur  $]1; +\infty[$ .

c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  puis montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f(x) \geq 0$ .

3) Construire la courbe  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### Examen National 2012 (Session Normale)

#### PROBLÈME 7

##### Première Partie :

Soit  $g$  fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$$

1) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$3x^3 - x - 2 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$$

b) Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

$$g'(x) = \frac{(x - 1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

2) a) Vérifier que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \frac{3x^2 + 3x + 2}{x} > 0$

b) En déduire que le signe de  $g'(x)$  est celui de  $x - 1$

sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

3) a) Montrer que la fonction  $g$  est décroissante sur  $]0; 1]$  et croissante sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

b) En déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .

**Deuxième Partie :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 1 cm)

1) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

puis en déduire que  $f$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ .

2) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  puis interpréter géométriquement ce résultat.

b) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$  puis que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

c) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote oblique de la courbe  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$

3) a) Montrer que  $y = 3(x - 1)$  est une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point de coordonnées  $(1; 0)$ .

b) Construire, dans le même repère, la droite  $(T)$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$ . (On admet que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet unique point d'inflexion que l'on ne cherchera pas à déterminer).

**Examen National 2010 (Session De Rattrapage)**

**PROBLÈME 8**

**Première Partie :**

Soit  $g$  fonctions numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^3 - 1 - 2 \ln^2 x + 2 \ln x$$

Le tableau suivant donne les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

1) Calculer  $g(1)$ .

2) À partir du tableau de variations de la fonction  $g$ , déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $]0; 1]$  et  $[1; +\infty[$ .

**Deuxième Partie :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (Unité : 1 cm)

1) a) Vérifier que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b) Montrer que la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = x - \frac{1}{2}$  est une asymptote de  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

c) Déterminer la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $(\mathcal{D})$ .

2) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  puis interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ .

b) Montrer que  $f$  est décroissante sur  $]0; 1]$  et croissante sur  $[1; +\infty[$ .

4) Construire  $(\mathcal{D})$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

**Examen National 2018 (Session De Rattrapage)**