4ème - Calcul littéral, équations

COMPÉTENCES ÉVALUÉES DANS CE CHAPITRE :

(**T** : compétences transversales, **N** : activités numériques, **G** : activités géométriques, **F** : gestion de données et fonctions)

Intitulé des compétences		**Eval.1**	**Eval.2**	**Eval.3**
T1	Connaître le vocabulaire, les définitions et les propriétés du cours	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N22	Remplacer la lettre par un nombre dans une expression littérale ; tester une égalité	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N23	Développer un produit à l'aide de la règle de distributivité simple	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N24	Factoriser, réduire une somme à l'aide de la règle de distributivité simple	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N25	Appliquer la règle de suppression des parenthèses précédées d'un signe + ou d'un signe −.	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N26	Développer un produit en utilisant la règle de distributivité double	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N27	Résoudre une équation du premier degré à une inconnue	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯
N28	Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue	◯ ◯	◯ ◯	◯ ◯

Taux de réussite : ....%
Note du chapitre : ..../20
Moyenne de la classe : ..../20

* : cette compétence fait partie du **socle commun**.

Légende du tableau de compétences :

Deux points verts :	*Je sais très bien faire*
Un point vert :	*Je sais bien faire, mais il reste quelques erreurs*
Un point rouge :	*Je ne sais pas bien faire, il y a trop d'erreurs*
Deux points rouges :	*Je sais pas faire du tout*

12.1 Remplacer la lettre par un nombre dans une expression littérale ; tester une égalité

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont représentés par des lettres. Une même lettre désigne toujours un même nombre dans une expression littérale donnée.

Par exemple :

$\boxed{E = 4x^2 - x + 3}$ est une expression littérale dans laquelle un nombre est représenté par la lettre x

On peut **calculer la valeur de cette expression** lorsque la lettre prend une valeur donnée.

Par exemple, pour $x = -2$, on a $\boxed{E = 4 \times (-2)^2 - (-2) + 3 = 4 \times 4 + 2 + 3 = 16 + 2 + 3 = 21}$

Tester si l'égalité $2x + 4 = 13 - x$ est vraie pour $x = 3$

• **D'une part,** le premier membre vaut $2 \times 3 + 4 = 6 + 4 = 10$,

• **d'autre part** le second membre vaut $13 - 3 = 10$

Comme les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vérifiée.

12.2 Développer un produit grâce à la règle de distributivité simple

Définition

Développer un produit signifie l'écrire sous la forme d'unesomme ou d'une différence.

Pour ce faire, on dispose d'un premier moyen :

Développer grâce à la règle de distributivité simple

Soient k, a et b trois nombres relatifs. On a :

$k(a + b) = k \times a + k \times b$ autrement dit, en simplifiant l'écriture, $\boxed{k(a + b) = ka + kb}$

Exemples :

- $2(3 + 5x) = 2 \times 3 + 2 \times 5x = 6 + 10x$
- $5y(3 - 2y) = 5y\big(3 + (-2y)\big) = 5y \times 3 + 5y \times (-2y) = 15y - 10y^2$

12.3 Factoriser, réduire une expression

Définition

Factoriser une somme ou une différence signifie l'écrire sous la forme d'un produit.

C'est donc l'opération "inverse" du développement :

Factoriser grâce à la règle de distributivité simple

Soient k, a et b trois nombres relatifs ; on a
$\underline{k}a+\underline{k}b=\underline{k}(a+b)$ autrement dit, en simplifiant l'écriture, $\boxed{ka+kb=k(a+b)}$

Exemples :

- $\underline{5}x+\underline{5}y=\underline{5}(x+y)$
- $3b-5b=3\underline{b}+(-5)\underline{b}=(3-5)\underline{b}=-2b$
- $3x^2-x=\underline{x}\times 3x-\underline{x}\times 1=\underline{x}(3x-1)$

Définition

Réduire une expression littérale, cela consiste à effectuer la somme algébrique des termes "de même nature", afin d'écrire cette expression avec le moins de termes possibles.

Exemples :

- $5x-2+3x+7 = 5x+(-2)+3x+7 = 5x+3x+(-2)+7=8x+5$

On a regroupé d'une part les "**termes en x**", d'autre part les "**termes constants**"

- $5x^2+x-7x^2+5x-11 = 5x^2+x+(-7x^2)+5x+(-11) = 5x^2+(-7x^2)+x+5x+(-11)=-2x^2+6x-11$

On a regroupé entre eux les "**termes en x^2**", les "**termes en x**", et enfin les "**termes constants**"

12.4 Règles de suppression des parenthèses précédées d'un signe +, d'un signe −

Parenthèses précédées d'un signe +

Pour **ajouter** une somme algébrique écrite entre parenthèses, il suffit d'additionner chaque terme de cette somme algébrique :

Pour tous nombres relatifs a, b, c et d, on a $a+(b+c-d)=a+b+c-d$

Exemples : • $2x+(3+5x)=2x+3+5x=7x+3$ • $5+(9x-1)=5+9x--1=9x+4$

Parenthèses précédées d'un signe −

Pour **soustraire** une somme algébrique écrite entre parenthèses, il suffit d'additionner les opposés de chacun des termes de cette somme algébrique :

Pour tous nombres relatifs a, b, c et d, on a $\quad a-(b+c-d)=a-b-c+d$

Exemples : • $2x-(3+5x)=2x-3-5x=-3x-3$ • $5-(9x-1)=5-9x+1=-9x+6$

12.5 Double distributivité

Règle de double distributivité

Soient a, b, c et d quatre nombres relatifs ; on a :

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Exemples :

• $(x+2)(x+5) = x\times x + x\times 5 + 2\times x + 2\times 5 = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$

• $(3x+2)(x-5) = (3x+2)(x+(-5)) = 3x\times x + 3x\times(-5) + 2\times x + 2\times(-5) = 3x^2 + (-15x) + 2x + (-10) = 3x^2 - 13x - 10$

12.6 Résoudre une équation du premier degré

Définitions

• Une **équation** est une égalité dans laquelle un nombre - appelé **inconnue** de l'équation - est représenté par une lettre.
• S'il en existe, la (ou les) valeur(s) de l'inconnue pour la(les)quelle(s) l'égalité est vraie sont appelées **solutions** de l'équation.
• **Résoudre** une équation consiste à trouver **toutes** ses solutions

Exemple :

$2x+3=11$ est une équation, d'inconnue x.

On dit qu'elle est du **premier degré**, car la plus grande puissance de x est 1.

• $x=2$ **n'est pas** une solution de cette équation ; en effet, on a $\quad 2\times 2+3=4+3=7\neq 11$

• $x=4$ **est** une solution de cette équation ; en effet, on a $\quad 2\times 4+3=8+3=11$

Comment résoudre une équation ?

On s'appuie sur deux règles de calcul sur les égalités :

Règles de calcul sur les égalités

Soient a, b et c trois nombres relatifs.
On ne change pas une égalité (*c'est-à-dire qu'une égalité vraie reste vraie*) lorsque :

- on **ajoute** (ou on **soustrait**) un **même nombre** à ses deux membres :
  $\boxed{\text{Si} \quad a=b \quad \text{alors} \quad a+c=b+c \quad \text{et} \quad a-c=b-c}$
- on **multiplie** (ou on **divise**) par un **même nombre** chacun de ses deux membres :
  $\boxed{\text{Si} \quad a=b \quad \text{alors} \quad a\times c=b\times c \quad \text{et} \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{c}}$

Application à la résolution d'une équation : Pour résoudre une équation de ce type, on doit **isoler** x dans un des membres de l'équation.

$$
\begin{array}{r|rcl|l}
 & x+7 & = & -2x-2 & \\
+2x & x+7+2x & = & -2x-2+2x & +2x \\
 & 3x+7 & = & -2 & \\
-7 & 3x+7-7 & = & -2-7 & -7 \\
 & 3x & = & -9 & \\
\div 3 & \dfrac{3x}{3} & = & \dfrac{-9}{3} & \div 3 \\
 & x & = & -3 &
\end{array}
$$

$\boxed{\text{La solution de cette équation est } -3}$

Vérification : $-3+7=4$ et $-2\times(-3)-2=4$

① On commence par **ajouter $2x$ aux deux membres de l'équation**, pour éliminer les x du second membre.

② Ensuite on **soustrait 7 aux deux membres de l'équation**, pour éliminer les termes constants du premier membre.

③ On termine en **divisant par 3 les deux membres de l'équation** pour finir d'isoler l'inconnue.

12.7 Mettre en équation et résoudre un problème

Toutes les résolutions de problèmes par mise en équation se déroulent selon un schéma en 4 étapes, qu'il faut impérativement respecter ; en voici un exemple :

Enoncé : Deux enfants, Adrien et Béatrice, jouent aux billes. Adrien dit : "J'ai seize billes de moins que toi…" ; ce à quoi Béatrice répond : "J'en ai trois fois plus que toi !". Combien de billes possède Adrien ?

Résolution :

Etape 1 : choix de l'inconnue	On note x le nombre de billes que possède Adrien.
Etape 2 : mise en équation du problème	La phrase "J'ai seize billes de moins que toi…" se traduit par "Béatrice possède $x+16$ billes". La phrase "J'en ai trois fois plus que toi !" se traduit par "Béatrice possède $3x$ billes". On a donc l'équation $\boxed{x+16=3x}$
Etape 3 : résolution de l'équation	$\begin{aligned} x+16 &= 3x \\ x+16-3x &= 3x-3x \quad (-3x) \\ -2x+16 &= 0 \\ -2x+16-16 &= 0-16 \quad (-16) \\ -2x &= -16 \\ \frac{-2x}{-2} &= \frac{-16}{-2} \quad \div(-2) \\ x &= 8 \end{aligned}$ $\boxed{\text{La solution de cette équation est 8}}$ Vérification : $8+16=24$ et $3\times 8=24$
Etape 4 : Interprétation et conclusion	*NB : Le résultat est un nombre entier positif, ce qui est cohérent avec l'énoncé* Pierre possède 8 billes (et Béatrice 24).