

**I. Primitives d'une fonction numérique :**

**a. Définition :**

- Une fonction  $F$  est une primitive d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  si  $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$  .

**b. Exemple :**

- Fonction primitive de la fonction  $f(x) = 4x + 2$  sur  $\mathbb{R}$  est  $F : x \rightarrow x^2 + 3x$  .
- Fonction primitive de la fonction  $f(x) = \cos x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $F(x) = 3 + \sin x$  .

**c. Propriété :**

- Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une fonction primitive sur  $I$  .

**d. Propriété :**

$F$  est une primitive d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$

- Toute fonction primitive  $G$  de  $f$  sur  $I$  est de la forme  $G(x) = F(x) + c ; (c \in \mathbb{R})$  .

**e. Exemple :**

Les fonctions primitives de la fonction  $f(x) = 4x + 2$  sur  $\mathbb{R}$  sont de la forme  $F(x) = x^2 + 3x + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$  .

**f. Propriété :**

$F$  est une primitive d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$

$x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$  ; il existe une seule fonction primitive  $G$  de  $f$  qui vérifie la condition  $G(x_0) = y_0$  .

**g. Exemple :**

Déterminer la fonction primitive de  $f(x) = x^3 - 2x + 3$  qui prend la valeur 0 ( zéro ) en  $-1$  .

Les primitives de  $f$  sont de la forme  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x + c ; c \in \mathbb{R}$

$$\text{Puisque } F(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^2 + 3 \times (-1) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - 4 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{15}{4}$$

**Conclusion :** La fonction primitive de  $f(x) = x^3 - 2x + 3$  qui prend la valeur 0 ( zéro ) en  $-1$  est :

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 3x + \frac{15}{4} .$$

**II. Fonctions primitives de la somme de deux fonctions – le produit d'une fonction par un réel  $\alpha$  :**



**a. Propriété :**

**F** et **G** sont les primitives respectivement de **f** et **g** sur **I** on a :

- ❖ **F + G** est une primitive de **f + g** .
- ❖ **αF** est une primitive de **αf** .

**b. Exemple :**

Soient  $f(x) = 3x$  et  $g(x) = \cos(x)$  , leurs fonctions primitives sont respectivement  $F(x) = 6x^2 + c$  et  $G(x) = \sin x + c'$  avec  $c$  et  $c' \in \mathbb{R}$

**III. Operations sur les fonctions primitives - Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles**

Operations sur les fonctions primitives		Tableau des fonctions primitives des fonctions usuelles	
Fonction h	H primitive de h	Fonction f	F primitives de f (c ∈ ℝ)
$h = f' + g'$	$H = f + g$	$f(x) = 0$	$F(x) = c$
$h = \alpha f'$	$H = \alpha f$	$f(x) = a; (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax + c$
$h = f' \times g + f \times g'$	$H = f \times g$	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2} x^2 + c$
$h = -\frac{g'}{g^2}$	$H = \frac{1}{g}$	$f(x) = x^n; (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$h = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$H = \frac{f}{g}$	$f(x) = x^r; (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$h = f' \times f^n \quad n \neq -1$ مع	$H = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$h = f' \times f^r \quad r \neq -1$ مع	$H = \frac{1}{r+1} f^{r+1}$	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$
$h = f' \times g' \circ f$	$H = g \circ f$	$f(x) = \sin(ax + b) \quad a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$h = f'(ax + b) \quad a \neq 0$	$H = \frac{1}{a} f(ax + b)$	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$
		$f(x) = \cos(ax + b) \quad a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
		$f(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan(x) + c$
		$f(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{f(x)} + c$
		$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$